Teoria miary
WPPT/SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
Wykład 16: Miary znakowane, rozkład Hahna

16/01/07

Jeśli w definicji miary (przeliczalnie addytywnej) zaniedbamy warunek nieujemności (oraz monotoniczności), to otrzymamy tzw. miary znakowane. Trzeba jednak unikać sytuacji, w których miara taka przyjmuje jednocześnie wartości plus i minus nieskończone.

Definicja. Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną. Funkcja $\mu : \Sigma \to (-\infty, \infty]$ lub $\mu : \Sigma \to [-\infty, \infty)$ nazywa się miarą znakowaną, jeśli spełnia
(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) $\mu(\dot{\bigcup} A_n) = \sum \mu(A_n)$.

(Zauważmy, że szereg po prawej stronie zawsze ma określoną wartość (i nie zależy od kolejności sumowania), gdyż albo suma wyrazów dodatnich albo suma wyrazów ujemnych (w zaelżności od przypadku przeciwdziedziny) jest skończona (jest to miara sumy odpowiednich zbiorów).

Badanie miar znakowanych można sprowadzić do badania miar nieujemnych dzięki temu, że każda miara znakowana rozkłada się na różnicę miar nieujemnych. Jest to właśnie treścią tego wykładu. Zaczniemy jednak od lematu dotyczącego miar nieujemnych, który będzie potrzebny w ostatnim kroku głównego dowodu.

Lemat 1. *Dane są dwie miary (nieujemne) μ i ν na Σ. Zakładamy, że $\nu < \infty$ i $\nu \ll \mu$. Jeśli ciąg zbiorów $B_n \in \Sigma$ spełnia $\mu(B_n) \to 0$, to również $\nu(B_n) \to 0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że teza nie zachodzi. Wtedy istnieje podciąg n_k, dla którego $\nu(B_{n_k}) > \epsilon > 0$. Przechodząc do dalszego podciągu można założyć, że ciąg $\mu(B_{n_k})$ jest sumowalny. Wtedy, z lematu Borela-Cantelliego, $\mu(\overline{\lim}_k B_{n_k}) = 0$. Z drugiej strony wiemy, że $\nu(\overline{\lim}_k B_{n_k}) \geq \overline{\lim}_k \nu(B_{n_k})$ (zob. lista zadań nr. 2), czyli, w naszym przypadku $\nu(\overline{\lim}_k B_{n_k}) \geq \epsilon$, co przeczy absolutnej ciągłości ν względem μ. $\square$

Twierdzenie Hahna-Jordana o rozkładzie miary znakowanej. *Niech μ będzie ograniczoną z góry miarą znakowaną na Σ. Wtedy istnieje rozkład $\mu = \mu^+ - \mu^-$ miary μ na różnicę wzajemnie singularnych miar nieujemnych.*

Dowód. Dla $A \in \Sigma$ zdefiniujmy

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma, B \subset A\}.$$

Łatwo sprawdza się, że jest to poprawnie określona miara nieujemna. Co więcej, $\mu^+ \geq \mu$, więc

$$\mu^- = \mu^+ - \mu$$

jest również poprawnie określoną miarą nieujemną. Sprawdzimy teraz wzajemną singularność. Miara μ^+ jest ograniczona, więc istnieje jej rozkład $\mu^+ = \mu_1^+ + \mu_2^+$ na część absolutnie ciągłą i singularną względem μ^-. Musimy pokazać, że $\mu_1^+ \equiv 0$. Załóżmy, że istnieje zbiór A taki, że $\mu_1^+(A) > 0$. Wtedy również $\mu_1^+(A \cap D) > 0$, gdzie D jest zbiorem z definicji singularności $\mu_2^+ \perp \mu^-$, czyli takim, że $\mu_2^+(D) = 0$ i $\mu^-(D^C) = 0$ (bo wtedy $\mu_1^+(D^c) = 0$). Dla każdego podzbioru $B \subset A \cap D$ mamy $\mu_2^+(B) = 0$. Niech B_n będzie ciągiem podzbiorów $A \cap D$ realizującym supremum w definicji $\mu^+(A \cap D)$. Wtedy

$$0 < \mu_1^+(A \cap D) \leq \mu^+(A \cap D) = \lim_n \mu(B_n) =$$
$$\lim(\mu_1^+(B_n) + \mu_2^+(B_n) - \mu^-(B_n)) = \lim(\mu_1^+(B_n) + 0 - \mu^-(B_n)).$$

Ponieważ ciąg $\mu_1^+(B_n)$ jest ograniczony, można, wybierając podciąg, założyć jego zbieżność. Wtedy $\mu^-(B_n)$ jest również zbieżny (jako suma ciągów zbieżnych):

$$\lim_n \mu_1^+(B_n) - \lim_n \mu^-(B_n) = \mu^+(A \cap D) > 0.$$

Ponieważ $\mu_1^+(B_n) \leq \mu_1^+(A \cap D)$, musi zachodzić zbieżność $\mu^-(B_n) \to 0$. Z Lematu 1 wynika, że również $\mu_1^+(B_n) \to 0$, stąd $\mu_1^+(A \cap D) = 0$, sprzeczność. $\square$

Uwaga. Rozkład Hahna-Jordana jest jednoznaczny: przypuśćmy, że $\mu = \nu' - \nu''$ (obie miary nieujemne), to

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A\} \leq \sup\{\nu'(B) : B \subset A\} \leq \nu'(A).$$

Czyli $\nu' \geq \mu^+$. Zatem miara $\xi = \nu' - \mu^+$ jest nieujemna. Ponieważ $\mu^+ - \mu^- = \nu' - \nu'' = \mu^+ + \xi - \nu''$, więc $\nu'' = \mu^- + \xi$ (no i $\nu' = \mu^+ + \xi$). Skoro ξ jest nieujemną składową zarówno ν' jak i ν'' i te ostatnie miary są wzajemnie singularne, to ξ musi być singularna wobec samej siebie. Ale ξ jest też absolutnie ciągła wobec samej siebie. Zatem $\xi \equiv 0$ i rozkład na ν' i ν'' jest tożsamy z rozkładem na μ^+ i μ^-.

ZASTOSOWANIE: Twierdzenie Riesza dla funkcjonałów nie tylko nieujemnych.

Twierdzenie Riesza (o reprezentacji funkcjonału na $C(X)$). *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zwartą i niech $C(X)$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych rzeczywistych na X z normą supremum. Niech χ będzie funkcjonałem liniowym ciągłym (równoważnie – ograniczonym) na $C(X)$. Wtedy istnieje skończona znakowana miara borelowska μ na X taka, że dla każdej $f \in C(X)$*

$$\chi(f) = \int f \, d\mu.$$

Na odwrót, dla dowolnej skończonej znakowanej miary borelowskiej μ powyższy wzór zadaje funkcjonał ograniczony χ na $C(X)$.

Dowód: To właśnie ostatnie zdanie wymaga rozkładu Hahna–Jordana. Jeśli μ jest skończoną miarą znakowaną, to $\mu = \mu^+ - \mu^-$, gdzie obie te miary są skończone. Zatem dla funkcji ciągłej f an X mamy

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^-,$$

a to, z twierdzenia Riesza dla miar nieuemnych jest różnica funkcjonałów nieujemnych ograniczonych na $C(X)$, czyli jakiś funkcjonał ograniczony.
Istnienie miary znakowanej reprezentującej dowolny funkcjonał (niekoniecznie nieujemny) ograniczony wymaga istnienia rozkładu takiego funkcjonału P na różnicę funkcjonałów ograniczonych nieujemnych $P^+ - P^-$. To jest właśnie treścią lematu zamieszczonego poniżej. Mając taki rozkład z łatwością dedukujemy istnienie miary znakowanej z Twierdzenia Riesza dla funkcjonałów nieujemnych (będzie to różnica miar otrzymanych dla P^+ i P^-).

Lemat. *Każdy funkcjonał ograniczony P na $C(X)$ przedstawia się jako różnica dwóch funkcjonałów nieujemnych ograniczonych:*

$$P = P^+ - P^-.$$

Dowód. (Wszystkie funkcje poniżej są ciągłe.) Funkcjonały P^+ i P^- określamy dla funkcji nieujemnej f wzorami

$$P^+(f) = \sup\{P(g) : 0 \leq g \leq f\}, \quad P^-(f) = -\min\{P(g) : 0 \leq g \leq f\}.$$

Oczywiście zawsze dostaniemy wartości nieujemne, bo w klamrze jest między innymi funkcja zerowa. Najpierw sprawdźmy, że $P = P^+ - P^-$. Mamy taką oczywistą równoważność: $0 \leq g \leq f \iff 0 \leq f - g \leq f$. Zatem

$$\sup\{P(g) : 0 \leq g \leq f\} = \sup\{P(f-g) : 0 \leq g \leq f\} =$$
$$P(f) + \sup\{-P(g) : 0 \leq g \leq f\} = P(f) - \min\{P(g) : 0 \leq g \leq f\}.$$

Teraz sprawdźmy liniowość P^+: Jeśli g i g' realizują z dokładnością do epsilona odpowiednie suprema dla funkcji nieujemnych f i f', to $0 \leq g + g' \leq f + f'$ i $P(g+g')$ jest z dokładnością do 2 epsilon równa $P^+(f)+P^+(f')$. To daje nierówność $P^+(f) + P^+(f') \leq P^+(f + f')$. Jeśli teraz $0 \leq g \leq f + f'$, to funkcje $(f-g)^+$ i $f' - (f-g)^-$ są nieujemne (dla tej drugiej: tam gdzie $f - g \geq 0$ wystarczy wiedzieć, że $f' \geq 0$ (a to założyliśmy), a w pozostałych punktach $(f-g)^- = -f + g \leq f'$), nie większe niż odpowiednio f i f'. Zatem

$$P^+(f) + P^+(f') \geq P((f-g)^+) + P(f' - (f-g)^-) = P(f' + f - g).$$

Ponieważ funkcje $f' + f - g$ reprezentują wszystkie funkcje między 0 a $f' + f$, otrzymujemy $P^+(f)+P^+(f') \geq P^+(f+f')$, czyli jest równość. Wyłączanie skalara nieujemnego jest natychmiastowe. Dla funkcji znakowanych $f = f^+ - f^-$ określamy $P^+(f) = P^+(f^+) - P^+(f^-)$. Liniowość wynika teraz ze wzorów $f^+ + g^+ = (f+g)^+ + h$, $f^- + g^- = (f+g)^- + h$, gdzie h jest pewną funkcją nieujemną:

$$P^+(f+g) = P^+((f+g)^+) - P^+((f+g)^-) + P^+(h) - P^+(h) =$$
$$P^+(f^+) + P^+(g^+) - P^+(f^-) - P^+(g^-) = P^+(f) + P^+(g).$$

Ograniczoność łatwo widać z definicji: norma nie przekracza $||P||$. Ponieważ $P^- = P - P^+$, nie musimy już o P^- niczego dowodzić. $\square$

Uwaga. A priori rozkład na różnicę dwóch funkcjonałów nieujemnych nie jest jednoznaczny, gdyż zawsze można dodać jakikolwiek nieujemny fukcjonał jednocześnie do P^+ i P^-. Ale P^+ i P^- określone w dowodzie lematu są w penym sensie optymalne: nie można już żadnego nieujemnego funkcjonału odjąć od P^+ i od P^- tak, aby nieujemność przynajmniej jedngo z nich nie została naruszona (bez dowodu). Jest to równoważne następującemu faktowi: Jeśli miara znakowana skończona μ reprezentuje funckcjonał ograniczony P, to μ^+ reprezentuje P^+ a μ^- reprezentuje P^-. (Miary μ^+ i μ^- są wzajemnie singularne; ta singularność tłumaczy się właśnie na ,,optymalność" rozkładu $P = P^+ - P^-$.)